

## LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE *FUNCIÓN* EN LOS TRATADOS DE BENITO BAILS (1731-1797)

**DOMINGO MARTÍNEZ-VERDÚ;<sup>1</sup> M. ROSA MASSA-ESTEVE<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MURCIA.

<sup>2</sup> CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Palabras clave: *didáctica, concepto de función, enseñanza de las matemáticas, Benito Bails, Leonhard Euler, España en el siglo XVIII*

### The teaching of the *function* concept in the treatises of Benito Bails (1731-1797)

Summary: *The formulation of the general function concept was both a significant change in the development of calculus and an added impetus to its "de-geometrisation". As a result of the publication in 1748 of the two volumes of Introductio in Analysin Infinitorum by Leonhard Euler (1707-1783) and their dissemination, the function concept took on a central role in analysis. This paper reflects on the didactic way in which Bails also introduced the function concept in 18th-century Spain in his courses devoted to mathematics teaching, with definitions similar to Euler's.*

Key words: *didactics, function concept, mathematics teaching, Benito Bails, Leonhard Euler, 18th-century Spain*

### Introducción

La creación del concepto general de *función* supuso tanto un gran cambio en los fundamentos del cálculo como un impulso añadido a su «desgeometrización». Se fue reemplazando en el cálculo el uso de las *cantidades geométricas variables* por el de las *funciones*, aunque consideradas como «expresiones analíticas» o fórmulas (Bos, 1984; Kleiner, 1989; Youschkevitch, 1976). Uno de los pasos importantes en la materialización de esta tendencia se produjo con la publicación, en 1748, de los dos volúmenes de la obra *Introductio in analysin infinitorum* (en adelante *Introductio*) de Leonhard Euler (1707-1783).

Desde la Antigüedad se encuentran tablas o correspondencias utilizadas para localizar, por ejemplo, cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas, o también tablas, usadas en cálculos astronómicos y trigonométricos, que ahora se pueden interpretar como una noción intuitiva de la idea de *función* basada en sucesiones numéricas. Desde finales del siglo XVI hasta mediados del siglo XVII, el proceso de creación de un lenguaje simbólico y el uso de procedimientos analíticos introducidos por François Viète (1540-1603), Pierre Hérigone (1580-1643) y desarrollados por René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665), para solucionar problemas geométricos, proporcionaron una herramienta algebraica en la creación del concepto de *función*.

La palabra *función* la encontramos en un manuscrito de 1673, *De functionibus plagulae quattuor* (Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe*,<sup>1</sup> serie VII, volumen IV: 500, 504, etc.) de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Y el mismo término se presentó más tarde impreso en unos pocos artículos que Leibniz publicó en 1692 y 1694 (*Nova calculi differentialis applicatio et usus*, 1694, Leibniz, 1849-1863, v: 306). En ellos, se asociaba *función* a objetos geométricos como abscisas, ordenadas, tangentes, etc. Posteriormente, fue Johann Bernoulli (1667-1748) quien definió explícitamente qué debía entenderse por *función* en un artículo publicado en 1718 (se recoge en su *Opera omnia*, Bernoulli, 1742, II: 241), dedicado a la solución del problema isoperimétrico (Struik, 1986). Finalmente, con la obra *Introductio* de Euler, alumno de Bernoulli, el concepto de *función* fue adquiriendo un papel central en el análisis.

En España, el concepto de *función* fue introducido por Benito Bails (1731-1797) en su obra *Elementos de matemática* en 1779. Bails estudió matemáticas y teología en la Universidad de Toulouse (Francia), y en 1755 se trasladó a París donde trabó amistad con D'Alembert y Condorcet, con los que colaboró en el *Journal Historique et Politique*. Bails fue secretario del embajador de España, y regresó con él a Madrid en 1761. Posteriormente fue nombrado director de Matemáticas de la Real Academia de las Bellas Artes de San Fernando (RABASF) de Madrid en 1768. Por encargo de dicha academia elaboró dos cursos de matemáticas: *Elementos de matemática* (Madrid, 1779-1802) y *Principios de matemática* (Madrid, 1776). *Elementos de matemática* es una obra de carácter científico enciclopédico compuesta de once tomos en trece volúmenes (1779-1802),<sup>2</sup> que abarca en los tres primeros tomos la matemática pura, y en el resto de volúmenes trata de la matemática mixta. Un compendio de los *Elementos* dio lugar a otra obra en tres tomos: *Principios de matemática*. En la segunda edición de esta última (1789, tomo II), Bails también introducía el concepto de *función*.

El objetivo de esta comunicación es reflexionar sobre el enfoque didáctico con el que Bails introdujo el concepto de *función* en la España del siglo XVIII, usando Euler y la teoría de las proporciones para mostrar cómo se pueden utilizar estas fuentes en la enseñanza de este concepto.

En una primera parte, se analizará el concepto de *función* en Euler y en Bails, según se define en las dos obras de Euler citadas por Bails: *Liber primus de Introductio in analysin infinitorum* (1748),<sup>3</sup> e

1. *Sämtliche Schriften und Briefe* ('Todos los escritos y cartas'), editado en Darmstadt, Leipzig y Berlín por la Academia de Ciencias de Berlín, series I-VIII. El primer volumen se publicó en 1923.

2. Sobre Bails y su obra véase Martínez-Verdú (2017). En 1791, Bails fue detenido por la Inquisición y desterrado a Granada, desde donde regresó al año siguiente a su casa en Madrid, en la que permaneció hasta su fallecimiento el 12 de julio de 1797.

3. Véase cita 19 de Bails (1779, II: xv): «*Introductio in Analysin infinitorum*. Auctore Leonardo Eulero, Professore Regio Berolinensi, &c. Academia Imperialis Scientiarum Petropolitane Socio, Lausana, 1748.»

*Institutiones calculi differentialis* (1755)<sup>4</sup> (en adelante *Institutiones*). En una segunda parte, se analizará con un enfoque didáctico cómo Bails algebriza la teoría de las proporciones usando las ecuaciones y a partir de las ecuaciones introduce las funciones. Esta segunda parte es la que se propone para su uso en el aula.

### El concepto de *función* en Euler y en Bails

En la *Introductio* (1748) de Euler el concepto de *función* está asociado al término *expresión analítica*. Por el contrario, en las *Institutiones* (1755) se hace una interpretación de *función* en la que Euler explicita la *dependencia* entre cantidades variables.

La primera definición, en orden cronológico, del concepto de *función* en Euler se encuentra en el punto 4 de la *Introductio* (véase fig. 1). Y aún añade Euler en el punto 5 que la *función* también es una cantidad variable.

4. *Función* de una cantidad variable es una expresión analítica comoquiera compuesta de esa cantidad variable, y números o cantidades constantes. (Euler, 1748, I: 4)<sup>5</sup>

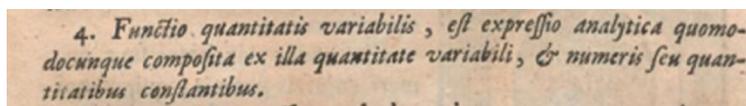


FIGURA 1. Definición de *función* según Euler.

FUENTE: Euler, 1748: 4.

Más tarde, Bails, en la sección titulada «De las series» (Bails, 1779, II, art. 281-428: 317-425) de sus *Elementos*, define de manera similar, en el artículo 282, lo que entiende por *función* de una cantidad variable (véase fig. 2).

**282 Llamamos *funcion* de una cantidad variable a toda expresion analytica, sea la que fuere, compuesta de dicha cantidad y de constantes.**

FIGURA 2. Definición de *función* según Bails.

FUENTE: Bails, 1779, II: 138.

Euler definió con otra interpretación el concepto de *función* en una obra posterior titulada *Institutiones* (1755). En el prefacio de esta obra, que trata del cálculo diferencial utilizando las ideas de Leibniz, Euler presentó el concepto de *función* como cantidades que pueden ser determinadas por otras, explicitando su dependencia (véase fig. 3).

4. Véase cita 15 de Bails (1779, III: XIV): «*Institutiones Calculi Differentialis cum ejus usu in Analysi finitorum ac doctrina serierum*. Auctore Leonardo Eulero &c. San Petersburgo, 1755.»

5. Aunque existe la traducción realizada por José Luis Arantegui Tamayo para la edición de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) (L. EULER (2000), *Introducción al análisis de los infinitos*, edición a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez, Sevilla, Grafitres, S. L.), hemos modificado algún aspecto.

Las cantidades que dependen unas de otras de este modo, aquellas que experimentan un cambio como consecuencia del cambio de otras, también suelen llamarse funciones de estas cantidades; esta definición se aplica en un sentido muy amplio e incluye todas las maneras en que una cantidad puede ser determinada por otras. (Euler, 1755, I: VI)

*Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant; eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur.*

FIGURA 3. Texto en latín de la definición de *función* de Euler.

FUENTE: Euler, 1755, I: VI.

Bails, como había hecho también Euler, definió en los *Principios*, en la sección «De las funciones» (t. II, art. 368-372: 243-245), la nueva interpretación del concepto de *función*, añadiéndole los términos de *enlace*, *relación* y *dependencia*: «Las cantidades entre las cuales hay este enlace, relacion ó dependencia...», poniendo un ejemplo, y más adelante ya define la función a la manera de Euler (véase fig. 4).

368 [...]

*Pero este término *funcion* tiene un sentido dilatadísimo, y significa todos los modos posibles de determinar una cantidad por medio de otras.*

FIGURA 4. Definición de *función* de Bails.

FUENTE: Bails, 1789, *Principios*, II: 24.

### Una concepción didáctica del concepto de *función* en Bails

En el periodo de 1778 hasta 1780, Bails publicó en tres tomos la segunda edición de los *Principios*. El tomo II (1779) está estructurado en seis secciones bien diferenciadas («Principios de álgebra», «Principios de secciones cónicas», «De las series», «Del cálculo diferencial», «Del cálculo integral» y «Principios de trigonometría esférica»). La tercera sección, «De las series», va precedida por una

243

**DE LAS FUNCIONES.**

368 **E**N las cuestiones que los matemáticos se proponen entran siempre ó quasi siempre

FIGURA 5. Inicio de la sección «De las funciones».

FUENTE: Bails, 1789, II: 243.

breve introducción, titulada «De las funciones», que consta de cinco artículos, el primero de los cuales es el artículo 368 del tomo II (art. 368-372: 243-245), insertados por Bails en esta segunda edición de los *Principios* (véase fig. 5).

### **Etapa 1: Algebrización de la teoría de las proporciones usando las ecuaciones**

Bails se propuso dar a conocer las funciones tomando como punto de partida un ejemplo de teoría de proporciones del tratado de la *Aritmética*. Bails realiza una aportación novedosa en la presentación del concepto de *función*, tendiendo un puente que enlaza la aritmética, el álgebra y el cálculo:

[...] se llaman funciones unas de otras, y las daremos á conocer recordando una cuestión resuelta en la *Arismética* (I.180).<sup>6</sup> (Bails, 1789, II: 243)

En este artículo (180: 147) (véase fig. 6), Bails plantea y resuelve una *cuestión* de teoría de proporciones mediante el algoritmo de la regla de tres simple directa.

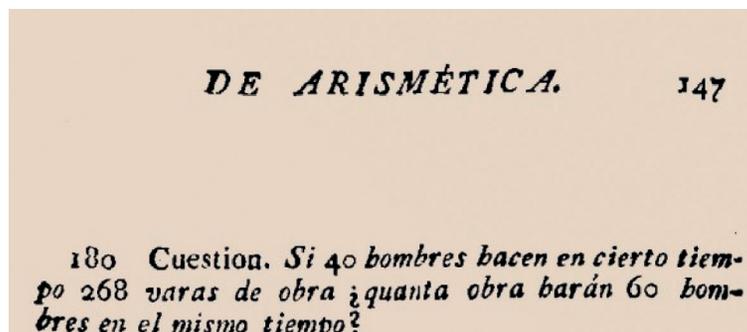


FIGURA 6. Art. 180 del *Tratado de Aritmética*.

FUENTE: Bails, *Principios*, 1788, I: 147.

Para resolver la *cuestión*, Bails plantea primero la proporción con las tres cantidades conocidas a falta de la cuarta proporcional (véase fig. 7).

**Las cantidades de un mismo nombre son aquí 40<sup>h</sup> y 60<sup>h</sup>, y como estos son mas que aquellos, tambien el número de varas que trabajarán será mayor que el número de varas que han trabajado los primeros. Vamos por lo mismo de lo mas á lo mas, esto es de mas hombres á mas varas, por cuyo motivo la regla es directa. Pongo las tres cantidades en proporcion**  
 $40^h : 60^h :: 268^v :$

FIGURA 7. Fragmento del artículo 180 de la *Aritmética*.

FUENTE: Bails, *Principios*, 1788, I: 147.

6. Hay que decir que con la indicación «*Arismética* (I.180)» Bails se está refiriendo a la parte de los «Principios de arismética» que se estudia en el tomo I de sus *Principios*.

Después prosigue explicando cómo simplificar la expresión y se extiende su explicación en el artículo 181 dando instrucciones sobre la forma de abreviar la regla. Tras efectuar varias operaciones aritméticas, llega a una expresión del tipo  $1 : a :: b :$ , que en el caso de la *cuestión* queda la proporción

$$1 : 1,5 :: 268 :$$

Bails pasa después a algebrizar la proporción ( $1 : k :: x^n : y$ ) y la transforma en una ecuación del tipo  $y = kx^n$ , con  $n = 1$  (en notación actual), que proporciona la solución de la *cuestión*:

$$402 = 1,5 \times 268 :$$

### **Etapa 2: Algebrización de la teoría de las ecuaciones con funciones**

Finalizada la algebrización de la proporción con una ecuación (art. 180-181 de la «Aritmética» del tomo I de los *Principios*), Bails continúa con el artículo 368 «De las funciones» («Álgebra», tomo II, *Principios*) y algebriza con una función la ecuación obtenida en la etapa 1. Bails, de forma retórica, explica en términos algebraicos la *función*: «El número de hombres, de cuyos aumentos ó decrementos pende el que crezca o mengue la obra, es una función del número que expresa sus varas» (Bails, *Principios*, 1789, II: 243).

Ahora se escribiría de forma simbólica como:

$$N. \text{ hombres } (h) = \text{función } (n. \text{ varas } (v)) [h=f(v)].$$

Cabe notar que puede intuirse en la conclusión de Bails una relación o dependencia entre el «conjunto» del número de hombres y el «conjunto» del número de varas. Bails no los considera solo números en abstracto, sino números ligados a clases o especies bien diferenciadas.

Se puede trasladar al aula el razonamiento de Bails con el desarrollo de alguna actividad sugerente para el alumno en la que se relacione las proporciones con el concepto moderno de *función* y la teoría de conjuntos. La idea es facilitar la asimilación de conceptos más complejos mediante la algebrización de ideas más básicas con el uso de signos, símbolos y expresiones algebraicas en un proceso de mayor abstracción. Como ejercicio para el aula se sugiere la importancia de poner de relieve la algebrización de las proporciones en ecuaciones, haciendo hincapié previamente, a semejanza de Bails, en que el alumno debe saber convenientemente qué representan y qué lugar deben ocupar cada una de las cantidades que componen la proporción, con el fin de que se algebrice adecuadamente la proporción usando una ecuación (Bails, 1789, I: 146). Las cuestiones que se pueden plantear al alumno pueden ser del tipo: «Tomando como modelo el problema de regla de tres directa resuelto por Bails, reproducir sus pasos para un problema de regla de tres inversa, plantear la proporción, algebrizarla usando una ecuación y encontrar la función asociada. Identifica las variables independiente y dependiente. Razona si puedes obtener siempre a partir de una proporción una función en su sentido moderno (a cada elemento de un primer conjunto se le asigna un único elemento de un segundo conjunto). Explica si se puede construir geoméricamente la proporción a partir de su algebrización usando una ecuación. Interpreta la construcción geométrica de la solución en términos de función.» Con la geometría se propone dar un aspecto visual intuitivo que complemente el pro-

ceso de abstracción y desarrolle su capacidad de razonamiento, con lo que le permite al alumno relacionar de forma holística la aritmética, el álgebra, el cálculo y la geometría.

### Algunas reflexiones

En 1779, Bails introdujo en su obra enciclopédica de los *Elementos* el concepto moderno de *función* como «expresión analítica», en línea con Euler. En segundo lugar, Bails, en 1789, formula una nueva definición del concepto de *función* en la segunda edición de los *Principios*. Allí ya no tiene cabida el término *expresión analítica*, y la función pasa a ser, como señala Youschkevitch (1976: 69) al referirse a Euler, una «noción general de correspondencia entre pares de elementos». Se trata de una definición más abstracta y general y Bails comparte claramente las ideas de Euler y sus difusores, enriqueciendo el texto de Euler con un lenguaje matemático muy actual usando las palabras *relación* y *enlace* como correlación entre cantidades variables. Tanto Euler como Bails sustentan los fundamentos del cálculo en el concepto de *función*.

Bails aportó una definición de *función* que surge de forma natural de la teoría de la proporción. Hasta donde nosotros conocemos, no parece que Bails haya utilizado ningún modelo ni referencia a seguir, ya sea española ya sea europea, en esta interpretación. El concepto de *función* ya no es algo abstracto plasmado en una definición, por el contrario, tiene unas profundas raíces arraigadas en la Antigüedad y, como más tarde interpretará Boyer (1946) en general, se observan tres pasos en la evolución de la idea de *función*: *proporción*, *ecuación* y *función*. Bails con su concepción didáctica de las matemáticas usa este camino para explicar el concepto de *función*. Bails aporta, por tanto, una aproximación a la teoría de la proporción desde un enfoque que va más allá de una igualdad entre dos razones.

Como reflexión final cabe resaltar esencialmente el punto de vista didáctico. La forma en que Bails formula el concepto de *función* podría ser apropiado para su traslado al aula e implicar a los alumnos en un proyecto histórico que abarcara la estrecha relación entre funciones, proporciones y ecuaciones, tal y como se sugiere en una «observación para la enseñanza» que hizo Kleiner.<sup>7</sup>

El hecho de proporcionar una visión global e integrada que relacione diferentes materias como aritmética, álgebra, cálculo y geometría puede aportar al alumno una concepción coherente de las matemáticas que conecta los conocimientos de disciplinas que en ocasiones se enseñan de forma aislada (Herrero *et al.*, 2017; Massa-Esteve, 2020). De esta manera, la historia de la matemática puede contribuir a proporcionar una percepción más amplia del conocimiento matemático, e incentivar la curiosidad del alumno por conocer la conexión entre los conceptos que va aprendiendo, con el propósito de motivarlo a la reflexión.

---

7. «Another interesting historical project, which cuts across several of the above sections, is to consider the following three stages in the evolution of the idea of function: proportion, equation, and function.» (Kleiner, 2012: 128), «Otro proyecto histórico interesante, que abarca varias de las secciones anteriores, es considerar las siguientes tres etapas en la evolución de la idea de función: proporción, ecuación y función.» (La traducción es de los autores.)

## Referencias bibliográficas

- BAILS, B. (1778-1780). *Principios de matemática*. 2ª ed. Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra. 3 t.
- (1779-1802). *Elementos de matemática*. Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra (Imprenta Vda. de Ibarra, los tomos publicados desde 1787). 11 t.
- BERNOULLI, J. (1742). *Opera omnia*. Tomos I y IV. Lausana y Ginebra: Sumptibus Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum.
- BOS, H. J. M. (1984). «Newton, Leibniz y la tradición leibniziana». En: GRATTAN GUINNES, I. (ed.). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: Una introducción histórica*. Madrid: Alianza, pp. 69-124.
- BOYER, C. B. (1946). «Proportion, equation, function: Three steps in the development of a concept». *Scripta Mathematica*, 12, pp. 5-13.
- EULER, L. (1748). *Introductio in analysis infinitorum*. Lausana: apud Marcum-Michaellem Bousquet & Socios. 2 v.
- (1755). *Institutiones calculi differentialis, cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina rerierum*. San Petersburgo: Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae. 2 v.
- (2000). *Introducción al análisis de los infinitos*. Edición a cargo de A. y F. Pérez. Traducción de José Luis Arantegui Tamayo. Sevilla: Grafitres, S. L.
- HERRERO, P. J.; LINERO, A.; MELLADO, A. (2017). «Algunos métodos de resolución numérica de ecuaciones del siglo XVI y su aplicación al aula de secundaria». En: GRAPI, P.; MASSA-ESTEVE, M. R. (ed.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, pp. 41-48.
- KLEINER, I. (1989). «Evolution of the function concept: A brief survey». *The College Mathematics Journal*, 20, 4, pp. 282-300.
- (2012). *Excursions in the history of mathematics*. Nueva York: Springer.
- LEIBNIZ, G. W. (1849-1863). *Mathematische Schriften*. Edición a cargo de C. I. Gerhardt. Londres: D. Natt; Berlín: A. Asher; Halle: H. W. Schmidt. 7 v. [Reeditado en 1989 por Hildesheim, Olms]
- MARTÍNEZ-VERDÚ, D. (2017). «La concepción didáctico-cognitiva de la enseñanza de las matemáticas en Benito Bails (1731-1797)». En: GRAPI, P.; MASSA-ESTEVE, M. R. (ed.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, 115-128. DOI 10.2436/10.2006.03.15.
- MASSA-ESTEVE, M. R. (2020). «The algebraization of mathematics: Using original sources for learning mathematics». *Teaching Innovations*, 33, 1, pp. 21-35.
- STROIJK, D. J. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800*. Princeton: Princeton University Press.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. (1976). «The concept of function up to the middle of the 19th century». *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 1, pp. 37-85.